第 26卷第 3期　　佛山科学技术学院学报 (自然科学版)　　Vol. 26 No. 3
2008年 5月　　Journal of Foshan University (Natural Science Edition)　　May 2008

文章编号: 1008-0171(2008) 03-0001-02

关于 Smarandache函数的一个不等式

乐茂华

(湛江师范学院 数学系 ,广东 湛江 524048)

摘要: 对于正数 n,设 $S(n)$是 n的 Smarandache函数。证明了存在无限多个正整数 n,可使 $S(n) < S(n - S(n))$。

关键词: Smarandache函数;复合函数;不等式
中图分类号: O156　　文献标识码: A

设 N 是全体正整数的集合。对于正整数 n,设 $S(n)$是可使 $n | m!$ 成立的最小正整数 m。如此的 $S(s)$ 称为 Smarandache函数 ,它的各种性质是数论中一个引人关注的研究课题[1]。1988年 , M. Bencze[2]曾经提出以下问题:

问题　是否存在无穷多个正整数 n 可使不等式

$$S(n) \leqslant S(n - S(n)), n \in N \tag{1}$$

成立?

1999年 , J. Sándor[3]找出了无穷多个正整数 n 可使不等式

$$S(n) = S(n - S(n))$$

成立。由此可知 ,存在无穷多个正整数 n,可使不等式 (1)中的“$\leqslant$”取等号“$=$”。本文将运用初等方法证明: 存在无穷多个正整数 n,可使不等式 (1)中的“$\leqslant$”取小于号“$<$”,即证明了:

定理　存在无穷多个正整数 n,可使

$$S(n) < S(n - S(n)), n \in N \tag{2}$$

成立。

证　设 k 是大于 4的合数。当 $n = k!$ 时 ,根据 Smarandache函数的定义可知

$$S(n) = k。 \tag{3}$$

从式 (3)可得

$$n - S(n) = k! - k = k((k - 1)! - 1)。 \tag{4}$$

因为 k 不是素数 ,所以 $k | (k - 1)!$,故有

$$\gcd(k, (k - 1)! - 1) = 1。 \tag{5}$$

从式 (4)与 (5)可知

$$S(n - S(n)) = \max(S(k), S((k - 1)! - 1))。 \tag{6}$$

由于 $k > 4$,所以 $(k - 1)! - 1 > 1$。设

$$(k - 1)! - 1 = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} \tag{7}$$

收稿日期: 2007-07-02
基金项目: 国家自然科学基金 (10271104);广东省自然科学基金项目 (06029035)
作者简介: 乐茂华 (1952-),男 ,上海人 ,湛江师范学院教授。

是$(k-1)!-1$的标准分解式,其中$p_1,p_2,\cdots,p_s$是适合$p_1<p_2<\cdots<p_s$的素数,$r_1,r_2,\cdots,r_s$是适当的正整数。从式(7)可知

$$S((k-1)!-1)=\max(S(p_1^{r_1}),(Sp_2^{r_2}),\cdots,S(p_s^{r_s}))。\tag{8}$$

将式(8)代入式(6)可得

$$S((n-S(n))=\max(S(k),S(p_1^{r_1}),(Sp_2^{r_2}),\cdots,S(p_s^{r_s}))。\tag{9}$$

由于$k>4$且k不是素数,故有

$$S(k)<k\tag{10}$$

同时,因为k不是素数,故从(7)可知

$$\min(p_1,p_2,\cdots,p_s)>k\tag{11}$$

已知

$$p_i\mid S(p_i^{r_i}),i=1,2,\cdots,s,\tag{12}$$

所以

$$S(p_i^{r_{i1}})\geqslant p_i,i=1,2,\cdots,s\tag{13}$$

于是,从式(9)~(11)和(13)可得

$$S(n-S(n))>k\tag{14}$$

因此,从式(3)和(14)可知如此的n满足不等式(2)。由于大于4的合数k显然有无穷多个,所以存在无穷多个正数n适合(2)。定理证完。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] BENCZE M. Open question 155[J]. Octogon Math Mag, 1998, 6(2): 216.
[3] Sá NDOR J. On the open problem OQ 155[J]. Octogon Mag, 1997, 7(2): 119-120.

An inequality concerning the smarandache function

LE Mao-hua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, China)

Abstract: For any positive integer n, let $S(n)$ denote the Smarandache function of n. In this paper we prove that there exist infinitely many positive integer ns satisfying $S(n)<S(n-S(n))$.

Key words: smarandache function; composite function; inequality